

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Современные методы исследования особенностей алгебраических многообразий
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Современная механика и робототехника
	Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра теоретической механики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.Б. Батхин, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры теоретической механики 09.04.2020

## Аннотация

Многие задачи теоретической и аналитической механики сводятся к исследованию алгебраических многообразий и их особенностей. Например, анализ областей устойчивости положений равновесия многопараметрических систем, определение и изучение особых положений робототехнических механизмов, исследование резонансных многообразий характеристического многочлена. В курсе рассматриваются 1) методы нелинейного анализа (степенной геометрии) разрешения особенностей алгебраических многообразий, базирующиеся на методе многогранника Ньютона, 2) методы компьютерной алгебры, основанные на вычислении базисов Грёбнера полиномиальных идеалов, методы исключения, 3) методы алгебраической геометрии (особенности алгебраических кривых, их униформизация), 4) методы квантового анализа (q-исчисления), позволяющие обобщить классические объекты теории исключений – результаты и дискриминанты – и получить конструктивное описание резонансного многообразия полинома в пространстве его коэффициентов. Подробно рассматриваются модельные примеры в динамике твёрдого тела, динамике механизмов, небесной механике. Предполагается выполнение практических заданий с использованием современных систем компьютерной алгебры.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Познакомить слушателей с современными методами исследования особенностей (сингулярностей) алгебраических многообразий, возникающих во многих задачах теоретической и аналитической механики, а также дать представления об инструментарии, реализованном, в основном, в виде алгоритмов компьютерной алгебры.

### Задачи дисциплины

Курс предполагает освоение необходимых теоретических сведений по таким разделам математики, как нелинейный анализ, основы теории алгебраических кривых, основы теории полиномиальных идеалов, основы квантового анализа, так и освоение современных инструментов разрешения особенностей с применением систем компьютерной алгебры: методов степенной геометрии, методов теории исключений и базисов Грёбнера, методов униформизации алгебраических кривых, методов квантового анализа.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов

ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
---	--

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

терминологию и методы исследований особенностей алгебраических многообразий.

уметь:

использовать методы исследований особенностей алгебраических многообразий.

владеть:

знаниями теории особенностей алгебраических многообразий.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основы нелинейного анализа	6	6		6
2	Элементы алгебраической геометрии	6	6		6
3	Понятие аффинного алгебраического многообразия	6	6		6
4	Анализ границы множества устойчивости положения равновесия	6	6		6
5	Введение в квантовый анализ	6	6		6
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Основы нелинейного анализа

Основы нелинейного анализа. Методы степенной геометрии: многогранник Ньютона, степенные преобразования, конус задачи, укороченное уравнение, разрешение особенности. Ряд Пьюизе. Асимптотическое решение алгебраического уравнения и систем алгебраических уравнений.

##### 2. Элементы алгебраической геометрии

Элементы алгебраической геометрии. Понятие римановой поверхности. Классификация особенностей алгебраических кривых. Род кривой. Локальная и глобальная униформизация. Рациональные и эллиптические кривые.

### 3. Понятие аффинного алгебраического многообразия

Понятие аффинного алгебраического многообразия. Идеал и его свойства. Базис Грёбнера идеала, его вычисление и применение для анализа структуры идеала. Основы теории исключений: результаты, субрезультаты и их вычисления. Методы Сильвестра, Безу, Кронекера, псевдо-деления Якоби. Анализ структуры корней многочлена по его субдискриминантам. Структура дискриминантного множества многочлена и его параметризация.

### 4. Анализ границы множества устойчивости положения равновесия

Анализ границы множества устойчивости положения равновесия многопараметрической механической системы в общем и гамильтоновом случаях.

### 5. Введение в квантовый анализ

Введение в квантовый анализ. Понятие квантовой производной, операторы Джексона и Хана, q-аналог бинома, ряда Тейлора, дискриминанта и результата многочленов. Понятие резонансного множества многочлена, определение его структуры и его параметризация.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, интерактивная доска).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Алгебраические кривые [Текст]/Р. Уокер, -М., Изд-во иностранной лит-ры, 1952
2. Математические методы классической механики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. И. Арнольд. — 5-е изд., стереотип. — М. : Эдиториал УРСС, 2003. — 416 с.

### Дополнительная литература

1. Элементы математики. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра [Текст]/Н. Бурбаки, -М., Физматгиз, 1962
2. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию [Текст]/Дж. У. Вик, -М., Изд-во МЦНМО, 2005

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтех  
<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».  
<http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук  
[https://mipt.ru/education/chair/theoretical\\_mechanics/](https://mipt.ru/education/chair/theoretical_mechanics/) - сайт кафедры теоретической механики МФТИ

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также программные пакеты Wolfram Mathematica и Matlab.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует большой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе);
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях,
- подготовку к контрольным, самостоятельным работам и тестам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в результате анализа итогов контрольных, самостоятельных работ и тестов, а также индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Современная механика и робототехника  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра теоретической механики  
**курс:** 1  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.Б. Батхин, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Современные методы исследования особенностей алгебраических многообразий» обучающийся должен:

### знать:

терминологию и методы исследований особенностей алгебраических многообразий.

### уметь:

использовать методы исследований особенностей алгебраических многообразий.

### владеть:

знаниями теории особенностей алгебраических многообразий.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Реализовать один из методов (на выбор: Сильвестра, Безу, Кронекера, псевдо-деления) вычисления всех субдискриминантов некоторого многочлена с числовыми коэффициентами. Проанализировать структуру корней многочлена.
2. Для заданного многочлена, коэффициенты которого суть полиномы от двух параметров, исследовать дискриминантное множество.
3. Дана механическая система, зависящая от набора параметров. Найти её положения равновесия. Для найденного положения равновесия выполнить анализ структуры дискриминантного множества. Провести анализ устойчивости в пространстве параметров по линейному приближению.
4. Построить бифуркационную диаграмму.

Пример кусуровых работ:

1. Для конкретного многочлена проанализировать структуру корней многочлена.
2. Для конкретной динамической системы исследовать особенности алгебраических многообразий
3. Для конкретной системы выполнить анализ структуры дискриминантного множества.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Для заданной алгебраической кривой найти все её особые точки, в каждой точке разрешить её особенность с использованием многоугольника Ньютона, степенного преобразования и укороченного уравнения. Построить локальную униформизацию каждой ветви кривой в окрестности особой точки.
2. Для заданной алгебраической кривой определить её род. Для рациональной кривой с простой особенностью найти её глобальную рациональную униформизацию.
3. Для неявно заданной алгебраической поверхности найти множества особых точек. Исследовать характер особенностей поверхности с использованием многогранника Ньютона, степенного преобразования и укороченного уравнения.
4. В одной из систем компьютерной алгебры реализовать процедуру разрешения особенности плоской алгебраической кривой.

#### **Критерии оценивания**

Зачет выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, возможно, с недочетами и неточностями.

Незачет выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний (или их полное отсутствие), допускающему грубые ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеющему основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяющему полученные знания даже в стандартной ситуации.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Подготовка к зачету самостоятельная: перечислены задачи, решение которых каждый студент излагает полностью.

Во время проведения зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.